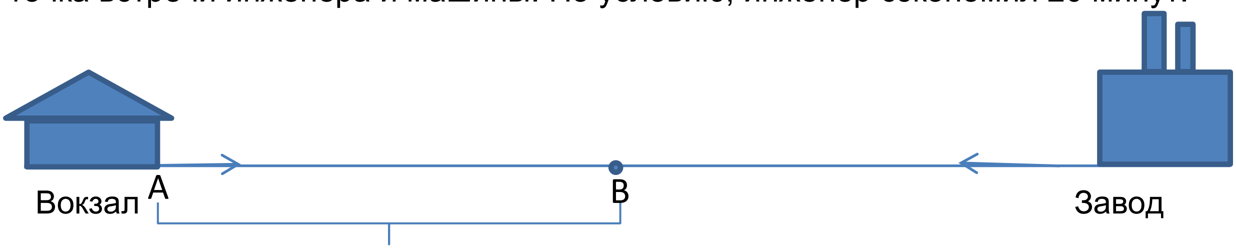
1. “Инженер едет на работу”

Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошел навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 мин раньше обычного. В какое время произошла встреча инженера с машиной?

Решение.

Кажется, что данных для ответа на вопрос недостаточно, но это не так. Пусть B – точка встречи инженера и машины. По условию, инженер сэкономил 20 минут.



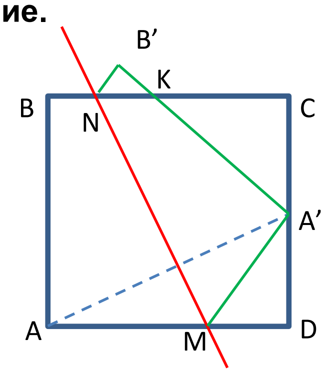
Это как раз то время, за которое автомобиль проезжает от B до A (вокзала) и обратно до точки B. Значит, на путь из B в A потребуется половина этого времени, т.е. 10 минут. Но автомобиль приехал бы на вокзал ровно в 8:00. Поэтому в точке B он был в 7:50.

Комментарий: Мы предполагаем, что на путь из B в A и на путь из A в B автомобиль тратит одинаковое время, однако это не всегда так. Например, если путь из B в A идет в гору, автомобиль – старая “Волга” и скорость в гору меньше, чем скорость под гору. Заметим также, что если бы условие было сформулировано чуть иначе “…Инженер оказался на заводе на 20 минут раньше обычного, встретив машину на своём пути…”, то задача допускала бы дополнительное решение: инженер пришел на завод прежде, чем машина выехала за ним. Например, если расстояние от вокзала до завода 4 км, скорость инженера 6 км/ч, скорость автомобиля 60 км/ч и автомобиль обычно выезжает на вокзал ровно в 7:56. Тогда инженер придёт на завод в 7:40, встретив машину стоящей у завода.

2. “Бумажный квадрат”

Бумажный квадрат ABCD со стороной 1 перегнули по прямой так, что вершина A совпала с серединой стороны CD. Чему равна площадь получившегося шестиугольника?

Решение.



По условию точка A совпадает с серединой A’ стороны CD. Поэтому часть квадрата симметрично отражается относительно срединного перпендикуляра MN к отрезку AA’ (красная линия на рисунке). Требуется найти площадь невыпуклого шестиугольника MNB’KCD. Пусть MD = x. Тогда MA’ = MA = 1-x.

Поэтому из прямоугольного треугольника MDA’ по теореме Пифагора:

$x^2 + (1/2)^2 = (1-x)^2 \Rightarrow x = 3/8$

Пусть теперь NB = NB’ = y. В силу симметрии AN = A’N. Поэтому по теореме Пифагора: $1 + y^2 = (1/2)^2 + (1-y)^2 \Rightarrow y = 1/8$.

Заметим, что искомая площадь складывается из площади трапеции NCDM, которая равна 1*(7/8 + 3/8)/2 = 5/8, и площади маленького треугольника NB’K.

Далее треугольники MDA’, A'CK и NB’K подобны (это прямоугольные треугольники, у которых соответствующие углы равны) с коэффициентом подобия KB’/NB’ = A’D/MD = 4/3. Отсюда, KB’ = 4/3*NB’= 1/6. Поэтому площадь маленького треугольника NB’K равна ½*(1/8)*(1/6) = 1/96. Отсюда искомая площадь равна 5/8 + 1/96 = 61/96.

3. “Случай с навигатором”

Петя ехал в Москву из области. После того как Петя проехал 3/4 пути, навигатор показал, что расчетное время в пути до Москвы равно 15 минут (навигатор считает, что средняя скорость на оставшемся участке будет равна средней скорости в пути к этому моменту). Однако сразу после этого скорость потока замедлилась и оставалась постоянной на всей оставшейся части пути до Москвы. В итоге через 15 минут навигатор снова показал расчетное время до Москвы 15 минут. Какое расчетное время покажет навигатор еще через полчаса?

Решение.

Кажется, что Петя уже доедет до Москвы через полчаса, однако это не так! Все дело в том, что расчетная средняя скорость навигатора и реальная средняя скорость на оставшемся участке пути будут сильно различаться. Давайте посчитаем.

Пусть Петя ехал из точки O (область) в точку M (Москва), расстояние между которыми равно S км. Когда Петя проехал ¾ пути, он оказался в точке A (см. рисунок). Если бы он ехал с той же скоростью оставшийся участок пути от A до M, то проехал бы ¼ S км за ¼ часа, т.е. средняя скорость на участке OA была равна S км/ч. Пусть на участке AM средняя скорость была равна v км/ч и через 15 минут Петя оказался в некоторой точке B. Навигатор считает, что оставшийся участок пути BM длиной (S/4 – v/4) км Петя проедет с той же средней скоростью, что и участок OB. Эта средняя скорость равна (¾*S + ¼*v) км/ч. По условию:

$(S/4 - v/4) / (¾ \cdot S + ¼ \cdot v) = ¼$ часа $\Rightarrow S - v = ¾ \cdot S + ¼ \cdot v \rightarrow S = 5v$

Еще через полчаса Петя окажется на расстоянии ¾*S + v/4 + v/2 = ¾*S + 3/4 *S/5 = =0.9S < S от точки O, т.е. Петя ещё не доедет до Москвы. При этом средняя скорость на всём участке, который Петя проедет к этому моменту (к этому моменту пройдёт ровно 1.5 часа), будет равна 0.9S / 1.5 = 0.6S км/ч. Значит, навигатор покажет расчетное время до Москвы 0.1S / 0.6S = 1/6 часа = 10 минут.

4. “Баскетбол”

Баскетбольный матч между командами 10 и 11 класса продолжался 45 минут. На исходе каждой минуты одна из команд зарабатывала 2 или 3 очка. Оказалось, что обе команды одинаковое время вели в счете в течение всего матча. Какова наибольшая возможная разница в счёте по итогам матча?

Решение.

Пусть A – команда, которая в итоге победила, а B – проиграла. Пусть t – последний момент в матче, когда команда B вела в счете (с преимуществом хотя бы в одно очко). Ясно, что $t > 22$, так как иначе команда A вела бы в счете больше половины времени всего матча, что противоречит условию задачи. Поэтому преимущество команды A над командой B по очкам по итогам матча не могло оказаться больше, чем $-1 + 23*3 = 68$. Легко построить пример, когда разница в счёте по итогам матча равна 68. Пусть, например, команда B заработала 3 очка на исходе первой минуты, затем команды A и B по очереди зарабатывали по 2 очка и, наконец, команда A заработала по 3 очка на исходе 23-ей, 24-ой, 25-ой,…., 45-ой минуты (всего 23*3 очков).